ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ QUYỂN

KĨ THUẬT TỔNG HỢP
GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỖN HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ QUYỂN

KĨ THUẬT TỔNG HỢP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỖN HỢP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Bất phương trình hỗn hợp được hiểu là bất phương trình phức tạp, chứa nhiều loại hàm khác nhau (đa thức, căn thức, mũ, logarit,...). Để giải những bất phương trình chứa nhiều loại hàm, ta thường phải "bóc từng lớp" để đưa về bất phương trình đơn giản. Tuy nhiên, cũng có nhiều bất phương trình hỗn hợp đòi hỏi sử dụng kĩ thuật giải tổng hợp, nói chung không thể dùng một kĩ thuật, mà phải sử dụng tổng hợp một vài hoặc đồng thời nhiều kĩ thuật để giải được những bất phương trình loại này.

Đã có một số sách viết về phương pháp giải bất phương trình và bất đẳng thức thí dụ, tài liệu [2], [5]. Tuy nhiên, theo quan sát của chúng tôi, vẫn nên đi sâu phân tích cụ thể và chi tiết hơn các phương pháp và các kĩ thuật tổng hợp giải bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức.

Trong các đề thi Trung học Phổ thông Quốc gia những năm gần đây (trước năm 2017) câu khó thường là các bài toán về phương trình, bất phương trình hoặc bài toán liên quan tới bất đẳng thức, bất phương trình hỗn hợp. Để giải các bài toán này, cần sử dụng thành thạo và nhuần nhuyễn các kĩ thuật tổng hợp. Bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức cũng hay gặp trong các kì thi (thi học sinh giỏi, Olympic

30–4, vô địch Quốc gia, Quốc tế,...).

Với những lí do trên, tác giả đã lựa chọn đề tài: *"Kĩ thuật tổng hợp giải bất phương trình hỗn hợp"* làm đề tài luận văn cao học của mình.

2. Lịch sử nghiên cứu

Chủ đề bất phương trình và bất đẳng thức có vị trí và vai trò quan trọng trong chương trình môn Toán ở trường Trung học phổ thông. Kiến thức và kĩ năng của chủ đề này có mặt xuyên suốt từ cuối Trung học Cơ sở, tới đầu cấp và đến cuối cấp Trung học phổ thông, thậm chí trong các kì thi Olympic sinh viên. Nó đóng vai trò như là chìa khóa để giải quyết nhiều bài toán trong thực tế.

3. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận văn hệ thống hóa và trình bày một số kĩ thuật giải bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức thường gặp trong các kì thi Olympic, thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Tất cả các bài toán trong luận văn đều được chọn lựa từ các đề thi vào đại học hoặc các bài thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế trong và ngoài nước, hoặc từ các báo chí, thí dụ, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
Bên cạnh việc hệ thống hóa các đề thi, luận văn còn cố gắng phân tích, tổng hợp các phương pháp thông qua các bài toán cụ thể.
Mục tiêu của luận văn: Luận văn có mục tiêu trình bày các phương pháp và kĩ thuật tổng hợp giải bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức. Các phương pháp và kĩ thuật tổng hợp giải bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức cũng đã được áp dụng cho các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải bất phương trình, hệ bất phương trình, và các bài toán cực trị. Hy vọng luận văn sẽ góp phần làm sáng tỏ thêm các kĩ

thuật và phương pháp giải bất phương trình, bất đẳng thức và được áp dụng vào thực tế học tập và giảng dạy.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Phân tích lí thuyết, phân dạng các loại bài tập.
- Đưa ra các bài tập minh họa phù hợp với từng nội dung.
- Tổng hợp tài liệu từ sách tham khảo, các sách liên quan đến đề tài.

5. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn gồm 2 Chương.

Chương 1: Phân loại một số kĩ thuật giải bất phương trình hỗn hợp.
Trong chương này, chúng tôi trình bày các kĩ thuật giải bất phương trình hỗn hợp. Trong mỗi kĩ thuật, trước hết là trình bày ý tưởng, sau đó chúng tôi trình bày nhiều ví dụ có lời giải chi tiết, thể hiện rõ kĩ thuật đã nêu.

Chương 2: Một số kĩ thuật tổng hợp giải bất phương trình hỗn hợp và bất đẳng thức.
Chương 2 trình bày một số bài toán về bất phương trình hỗn hợp mà phải dùng tổng hợp các kĩ thuật đã nêu ở chương 1 để giải. Cuối cùng là một số bài toán về bất đẳng thức.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Thầy đã định hướng chọn đề tài và nhiệt tình hướng dẫn cũng như giải đáp mọi thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn để tôi hoàn thành luận văn này.
Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng

dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian học tập, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Xin được cảm ơn nhà trường, Trường THPT Quế Võ Số 1, huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh đã tạo điều kiện và giúp đỡ tôi, cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong suốt thời gian học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Quyển

Chương 1

Phân loại một số kĩ thuật chủ đạo trong giải bất phương trình hỗn hợp

Để giải một bất phương trình, để chứng minh một bất đẳng thức hoặc một bài toán cực trị loại khó ta có thể sử dụng một số kĩ thuật sau.

1.1. Kĩ thuật biến đổi tương đương

Nói chung quá trình giải bất phương trình là quá trình biến đổi tương đương từ bất phương trình phức tạp về bất phương trình đơn giản nhờ một số tính chất của các hàm vô tỷ, mũ, logarit, ví dụ:

Tính chất 1.1 $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Tính chất 1.2 $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$

Tính chất 1.3 $f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)}$ *tương đương với* $\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases}$ *hoặc* $f(x) = 1$ *và* $g(x); h(x)$ *có nghĩa.*

Tính chất 1.4 *$f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)}$ tương đương với* $\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases}$ *hoặc $f(x) = 1$ và $g(x); h(x)$ có nghĩa.*

Kỹ thuật biến đổi tương đương là một kĩ thuật cơ bản, tuy nhiên đối với bất phương trình hỗn hợp, kĩ thuật này không phải lúc nào cũng áp dụng được một cách hợp lí, mà phải kết hợp thêm một số kĩ thuật khác. Các ví dụ dưới đây (và trong chương 2) sẽ trình bày và phân tích sâu hơn nhận xét này.

Bài 1.1 (Đề thi học sinh giỏi lớp 10 - Kon Tum, năm học 2013 -2014) Giải bất phương trình sau trên tập số thực

$$\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > 10 - 2x. \tag{1.1}$$

Bài giải. Ta có

$$(1.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ -x^2 + 8x - 12 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 12 \geq (10 - 2x)^2. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5 \\ 2 \leq x \leq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 5 \\ 5x^2 - 48x + 112 < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 < x \leq 6 \\ \begin{cases} x \leq 5 \\ 4 < x < \dfrac{28}{5}. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 < x \leq 6 \\ 4 < x \leq 5. \end{array} \right. \Leftrightarrow 4 < x \leq 6.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $4 < x \leq 6$.

Bài 1.2 (Đề thi học sinh giỏi lớp 12, Nghệ An, năm học 2013-2014) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x} \geq \sqrt{(x+1)^3}. \tag{1.2}$$

Bài giải. Điều kiện để bất phương trình (1.2) có nghĩa là

$$x \geq 0. \tag{1.2a}$$

Với điều kiện $(1.2a)$ thì

$$\begin{aligned}
&(1.2) \Leftrightarrow x\left(x+2\right) + 2\sqrt{x^3+2x^2} + x \geq \left(x+1\right)^3 \\
&\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{x^3+2x^2} + 1 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3+2x^2} - 1\right)^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^3+2x^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $(1.2a)$ suy ra $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 1.3 (Đề thi đề nghị Olympic 30 tháng 04 năm 2008, trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Tìm tất cả các cặp$(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình

$$x - |y| - \sqrt{x^2+y^2-1} \geq 1. \tag{1.3}$$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&x - |y| - \sqrt{x^2+y^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-1} \leq x - |y| - 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x - |y| - 1 \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq (x-|y|-1)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x \geq |y| + 1 \\ x^2+y^2-1 \leq x^2+y^2+1-2x|y|-2x+2|y| \end{cases}
\end{aligned}$$